Réduction de Jordan (par la dualité) | Leçons : 148, 151, 154, 156, 159

Lemme : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\forall x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$
La famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre et $F = \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ est stable par u.

Preuve : ▶ Supposons que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est liée et $u^{q-1}(x) \neq 0$
Il existe donc des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}$ non tous nuls tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$
On note p le plus petit entier compris entre 0 et $q-1$ tel que $\lambda_p \neq 0$
Or $u^{q-1}(x) \neq 0$ d'où $p \leq q-2$ on a donc

$$\lambda_p u^p(x) + \sum_{k=p+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

on pose $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p}$ on a donc

$$u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)$$

D'où

$$u^{q-1}(x) = u^{q-1-p}(u^p(x)) = u^{q-1-p}\left(\sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)\right) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x)$$

Or $u^q = 0$ donc $u^{q+k} = 0$ ~~$\forall k \in [\![0$~~ $\forall k \geq 0$

D'où $u^{q-1}(x) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x) = 0$ d'où l'absurdité donc la famille est libre

▶ Soit $v \in F$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}$ tels que $v(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = \lambda_0 x + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)$

D'où $u(v(x)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{q} \lambda = \lambda_0 u(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^q(x)$

$= \lambda_0 u(x) + \dots + \lambda_{q-2} u^{q-1}(x) \in F$ □

D'où $u(F) \subset F$ d'où la stabilité.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$
et $G = H^\perp = \mathrm{Vect}(\varphi, {}^tu(\varphi), \dots, ({}^tu)^{q-1}(\varphi))^\perp$ sont stables par u et $E = F \oplus G$

Preuve : On a ▶ $G = H^\perp = \{y \in E, \forall \varphi \in H, \varphi(y) = 0\}$ et $\dim G + \dim H = \dim E$
▶ Si H est stable par ${}^tu$ alors G est stable par u.
En effet, soit $y \in G$ et $\varphi \in H$ on a $\varphi(u(y)) = {}^tu(\varphi)(y) = 0$ car ${}^tu(\varphi) \in H = G^\perp$, $y \in G$
D'où $u(y) \in G$ d'où $u(G) \subset G$.
u est nilpotent d'ordre q donc ${}^tu$ aussi car $({}^tu)^q = {}^t(u^q) = 0$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $({}^tu)^{q-1}(\varphi) \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$

Ainsi $u^{q-1}(x) \neq 0$, d'après le lemme précédent on a que $\dim F = \dim H = q$

F est stable par u, H est stable par $^t u$ d'où G stable par u.

On a $\dim F + \dim G = \dim H + \dim G = \dim E$

Donc il suffit à montrer que $F \cap G = \{0\}$

Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G$, G étant stable par u on a que $u^{q-1}(y) \in G$

D'où $0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q+k-1}(x)) = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x))$

D'où $\lambda_0 = 0$.

Par récurrence, montrons que tous les λ_j sont nuls

- $\lambda_0 = 0$ d'où l'initialisation
- Supposons que $\lambda_0 = \dots = \lambda_j = 0$ on a donc

$y = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$ on a $u^{q-2-j}(y) \in G$ par stabilité de G par u

D'où $0 = \varphi(u^{q-2-j}(y)) = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q+k-2-j}(x)) = \lambda_{j+1} \underbrace{\varphi(u^{q-1}(x))}_{\neq 0}$

D'où $\lambda_{j+1} = 0$

Donc on a $\forall k \in [\![0, q-1]\!], \lambda_k = 0$ d'où $y = 0$

D'où $F \cap G = \{0\}$

D'où $E = F \oplus G$

<u>Théorème</u>: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_t$ telle que chaque sev $E_i = \mathrm{Vect}\,\mathcal{B}_i$ est stable par u et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i} u_{E_i} = J_i = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}) \text{ où } q_i = \dim E_i$$

□

<u>Preuve</u>: On effectue une récurrence sur la dimension de l'espace

- Si $n = 1$ on a $u = 0$ d'où le résultat
- On suppose le résultat vrai pour tout espace de dimension $k < n$, avec les mêmes notations on a F stable par u d'où $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est $J_q = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$

Si $q = n$ on a le résultat, sinon on peut compléter $\mathcal{B}_1$ par une base $\mathcal{B}_G$ de G car $E = F \oplus G$.

Et G est stable par u donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_G$ est $A = \begin{bmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{bmatrix}$

où $A_{n-q} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u_{|G}$ dans $\mathcal{B}_G$, cette matrice est nilpotente d'indice au plus q avec $\dim G < n$. Donc par hyp de réc on a $A_{n-q} = \begin{bmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$.

D'où l'hérédité d'où le résultat.

Algèbre, Rombaldi.

COMPLEMENT

- u nilpotent d'ordre q $\Leftrightarrow$ ${}^tu$ nilpotent d'ordre q : On a ${}^t(\underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{q \text{ fois}}) = {}^t(u^q)$

~~On a $x\in E$, $\phi\in E^*$, $\langle u(x),\phi\rangle = \langle x, {}^tu(\phi)\rangle$~~

$$= \underbrace{{}^tu\circ\cdots\circ {}^tu}_{q \text{ fois}} = ({}^tu)^q$$

- $F\subset E$ stable par u $\Leftrightarrow$ $F^\perp \subset E^*$ stable par ${}^tu$: Vient de $x\in F, d\in F^\perp$ et $\langle u(x), d\rangle = \langle x, {}^tu(d)\rangle$

- De manière générale : $\forall u$ TZ, $\exists$ base dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(J_1,\dots,J_p)$

où $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & \\ & \varepsilon_{k,d_k} & \lambda_k \end{bmatrix}$ avec $\varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$

En effet on note $N_k = \ker(u-\lambda_k id)^{d_k}$ les sous-esp caract

$\Rightarrow E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ par lemme des noyaux.

On a $\dim N_k = d_k$ et N_k stable par u et λ_k est la seule vap de $u_{|N_k}$

et $(u-\lambda_k id)_{|N_k}$ est nilp d'indice β_k d'où d'après $\exists$ base $\mathcal{B}_k$ de N_k

tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u-\lambda_k id)_{|N_k} = J_k = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & \\ & \varepsilon_{k,d_k} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{d_k}(\mathbb{K})$

par la réunion de ces bases on a le résultat.